

## Dynamický model tepelnej interakcie tuhého telesa s tekutinou

### Model of Dynamic Thermal Interaction between a Solid and a Fluid

doc. Mgr. Ivan Kopal, Ph.D.<sup>1,2</sup>; Ing. Marta Harničárová, Ph.D.<sup>1</sup>; doc. Ing. Jan Valíček, Ph.D.<sup>1,3</sup>; doc. RNDr. Milena Kušnerová, Ph.D.<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> VŠB – Technická univerzita Ostrava, Hornicko-geologická fakulta, Institut fyziky, 17. listopadu 15/2172, 708 33 Ostrava-Poruba, Česká republika

<sup>2</sup> Trenčianska univerzita Alexandra Dubčeka v Trenčíne, Fakulta priemyselných technológií v Púchove, Katedra numerických metód a výpočtového modelovania, I. Krasku 491/30, 020 01 Púchov, Slovenská republika

<sup>3</sup> VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta metalurgie a materiálového inžinýrství, Regionální materiálově technologické výzkumné centrum, 17. listopadu 15/2172, 708 33 Ostrava-Poruba, Česká republika

*Práca je venovaná detailnej analýze procesu chladnutia tuhého telesa v látkovom prostredí tekutiny, ktorá sa od neho zohrieva. Tepelná výmena medzi chladnúcim telesom a okolitou tekutinou je modelovaná prostredníctvom systému sústredenej tepelnej kapacity pre kombinovaný prenos tepla konvekciou a radiáciou, a to s aplikáciou dynamickej termoelektrickej analógie medzi nestacionárnym prenosom tepla a prenosom elektrického náboja v uzavretom elektrickom obvode. Popísaný je algoritmus návrhu a exaktného analytického riešenia tepelných diferenciálnych rovníc pre popis uvažovaného systému sústredenej tepelnej kapacity a detailne je diskutovaná vierohodnosť obdržaného riešenia v tvare teplotných funkcií aproximujúcich časovú históriu teploty chladnúceho telesa a zohrievajúcej sa tekutiny. Nájsené teplotné funkcie predstavujú zobernené analytické riešenie prenosu tepla v systéme sústredenej tepelnej kapacity tuhého telesa v látkovom prostredí okolitej tekutiny, a to ako pre ochladzovanie telesa (ohrev tekutiny), tak aj pre jeho ohrev (ochladzovanie tekutiny).*

**Kľúčová slova:** sústredená tepelná kapacita; termoelektrická analógia; kombinovaný prenos tepla; nestacionárny prenos tepla

*The study of heat transfer phenomena in solids and their thermal interaction with the surrounding environment plays an important role in understanding the processes of heat exchange almost in all areas of industrial practice. This study deals with creation of mathematical-physical models based on analytical solution of differential equations of heat conduction in solids under such marginal and initial conditions that must be met by technical design of the real experiment in order to make it possible to identify or predict the thermal properties of studied materials included in these models. Exact solutions of the differential equations of heat conduction are more or less complicated time-independent or time-dependent temperature functions, or stationary or dynamic temperature fields. One of the simplest, but extremely practical and comparatively easily technically feasible heat transfer dynamic model is a lumped capacitance model that neglects spatial changes in the distribution of temperature during the whole process of heat interaction of solids with their surrounding fluid environment. This paper is devoted to a detailed analysis of the cooling process of a solid body in the environment of fluid that is heated by the solid body. The heat exchange between the cooling body and the fluid surrounding it is modelled just by means of a system of lumped heat capacity for combined transfer of heat by convection and radiation, with application of the dynamic thermoelectric heat transfer analogy between non-stationary heat transfer and electric charge transfer in a closed electrical circuit. An algorithm for obtaining the exact analytical solution of the differential heat equations of the system of lumped heat capacity under consideration is described and the reliability of the obtained solution in the form of temperature functions approximating the time-temperature history of the cooling body and the heated fluid is discussed in detail. It has been shown that the found temperature functions represent the generalized analytic solution of the heat transfer problem of the system of lumped heat capacity of the solid body in the environment of the fluid surrounding the system as in the case of cooling the body (heating the fluid), as well as heating the body (cooling the fluid).*

**Key words:** lumped heat capacity; thermo-electrical analogy; combined heat transfer; non-stationary heat transfer

Štúdium teplotransportných javov v tuhých látkach a ich tepelnej interakcie s okolitým prostredím zohráva dôležitú úlohu v poznávaní procesov tepelnej výmeny prakticky vo všetkých oblastiach priemyselnej praxe.

Toto štúdium je podmienené tvorbou matematicko-fyzikálnych modelov na báze analytických, prípadne numerických riešení diferenciálnych rovníc vedenia tepla v tuhých látkach, a to pri takých okrajových

a začiatkových podmienkach, ktoré musia byť dodržané technickým usporiadaním reálneho experimentu umožňujúceho identifikovať, či predpovedať tepelné vlastnosti skúmaných materiálov figurujúce v týchto modeloch [1]. Riešením diferenciálnych rovníc vedenia tepla sú časovo nezávislé, alebo časovo závislé teplotné funkcie, resp. stacionárne alebo dynamické teplotné polia. Jedným z najjednoduchších, no prakticky ľahko technicky realizovateľných dynamických modelov prenosu tepla je model sústredenej tepelnej kapacity [2], ktorý zanedbáva priestorové zmeny v rozložení teploty počas celého procesu tepelnej interakcie tuhých látok s obklopujúcim ich tekutým prostredím. Týmto zanedbaním umožňuje makroskopické procesy viacrozmerného vedenia tepla v tuhých látkach aproximovať riešením priestorovo nezávislého problému. Cieľom tejto štúdie je modelovanie procesov tepelnej výmeny v systémoch sústredenej tepelnej kapacity tuhého telesa a obklopujúcej ho tekutiny s variabilnou teplotou, s aplikáciou analógie medzi nestacionárnym transportom tepla a prenosom elektrického náboja v idealizovanom uzavretom elektrickom obvode [3].

## 1. Model sústredenej tepelnej kapacity

Diferenciálnu rovnicu prenosu tepla v nepohybujúcom sa homogénnom a izotropnom tuhom telese s konštantnou hustotou  $\rho$ , hmotnostnou tepelnou kapacitou  $c_p$  a objemom  $V$ , chladnúceho bez vnútorných zdrojov tepla a bez kontaktu s inými tuhými telesami v neohraničenom prostredí tekutiny konštantnou teplotou  $T_\infty$  a konštantným úhrnným koeficientom kombinovaného prestupu tepla konvekciou a radiáciou  $h$ , je možné zapísať ako rovnicu tepelnej bilancie v tvare

$$\rho V c_p \frac{dT(t)}{dt} = -hS[T(t) - T_\infty], \quad (1)$$

kde  $T(t)$  je teplota telesa v čase  $t$ ,  $S$  je veľkosť celkového povrchu teplovýmenej plochy medzi telesom a obklopujúcou ho tekutinou a

$$h = h_c + h_r, \quad (2)$$

pričom  $h_c$  a  $h_r$  predstavujú koeficient konvektívneho a radiačného prestupu tepla v uvedenom poradí. Ak bude teplotný rozdiel  $[T(t) - T_\infty]$  v porovnaní s hodnotou  $T_\infty$  dostatočne malý, potom pre koeficient radiačného prestupu tepla  $h_r$  platí vzťah

$$h_r = 4\varepsilon\sigma T_\infty^3, \quad (3)$$

v ktorom  $\varepsilon$  predstavuje emisivitu povrchu telesa a  $\sigma$  Stefanovu-Boltzmannovu konštantu [4].

Za predpokladu, že všetky veličiny v tepelnej rovnici (1), s výnimkou  $T(t)$ , budú konštantnými v priebehu celého procesu tepelnej interakcie telesa s okolím, jej exaktným analytickým riešením pri začiatkovej podmienke  $T(t = 0) = T_0$  bude exponenciálna teplotná funkcia v tvare priestorovo homogénneho dynamického

teplotného polia (modelu tepelnej kapacity sústredenej v súčine  $\rho V c_p$ ) [5]

$$T(t) = T_0 + (T_\infty - T_0)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (4)$$

v ktorej

$$\tau = \frac{\rho c_p L}{h} \quad (5)$$

je relaxačný čas chladnúceho telesa, koncentrujúci všetky konštantné fyzikálne parametre skúmaného tepelného systému do jedinej veličiny, zatiaľ čo  $L$  je jeho charakteristický rozmer definovaný ako podiel veličín  $V/S$ . Model (4) pritom nachádza svoje praktické uplatnenie iba v tom prípade, ak vnútorný, konduktívny tepelný odpor telesa je zanedbateľne malý v porovnaní s vonkajším, úhrnným tepelným odporom tekutiny, teda len pre Biotove čísla s hodnotami

$$Bi = \frac{hL}{\lambda} \ll 1, \quad (6)$$

resp.  $Bi < 0,1$  [6]. Na dodržanie tejto podmienky v praktických aplikáciách obvykle postačí, aby tuhé teleso s konštantným koeficientom tepelnej vodivosti  $\lambda$  bolo dostatočne „tepelné tenké“, takže teplotné pole rozložené v jeho objeme je možné v každom jednom časovom okamihu tepelnej interakcie s okolitým prostredím tekutiny aproximovať jeho povrchovou teplotou [7].

Nezávislosť všetkých fyzikálnych veličín, združených v relaxačnom čase a Biotovom čísle, (t.j. tepelných, materiálových aj geometrických) od času predpokladá také teplotné podmienky tepelnej interakcie, pri ktorých v materiáli skúmaného telesa nedochádza k žiadnym fázovým zmenám, prípadne k štruktúrnym transformáciám a nedochádza ani k zmenám úhrnného tepelného odporu obklopujúcej ho tekutiny [8]. Viaceré špeciálne prípady analytického riešenia tepelných rovníc prenosu tepla s dynamickým relaxačným časom sú podrobne popísané napríklad v práci [9].

### 1.1 Numerické riešenie tepelnej rovnice

Ak koeficient radiačného prestupu tepla z dôvodu príliš vysokého teplotného rozdielu  $[T(t) - T_\infty]$  nie je možné dobre aproximovať vzťahom (3), ak teleso disponuje vnútornými zdrojmi tepla, alebo ak je v procese tepelnej interakcie s tekutým okolím v priamom kontakte aj s inými tuhými telesami, tepelná rovnica (1) prejde do nelineárnej nehomogénnej diferenciálnej rovnice prvého rádu, riešenie ktorej je obvykle možné len numerickými metódami [1]. V technickej praxi je stále preferovanou klasická metóda Rungeho-Kutta štvrtého rádu, ktorá vie poskytnúť riešenia s relatívne veľmi malou chybou numerického výpočtu [5]. Numerické metódy riešenia tepelných rovníc nachádzajú svoje široké uplatnenie najmä v prípadoch, kedy vedenie tepla v tuhých telesách nemožno aproximovať idealizovaným modelom sústre-

denej tepelnej kapacity, takže je nevyhnutné uvažovať aj dynamickú priestorovú závislosť rozloženia teplotného poľa v celom objeme tepelne interagujúcich objektov [2]. Numerické metódy tak poskytujú účinný nástroj pre riešenie komplexných viacrozmerných problémov tepelných interakcií najmä v širokej oblasti bežnej priemyselnej praxe.

## 2. Termoelektrická analógia systému sústredenej tepelnej kapacity

Špecifickým prípadom systému sústredenej tepelnej kapacity je tuhé teleso chladnúce v tekutine, ktorá sa od neho zahrieva. Na analýzu tepelného správania sa takétoho systému, pre ktorý je charakteristická variabilná teplota prostredia obklopujúceho telesa, je účelné aplikovať dynamickú termoelektrickú analógiu vychádzajúcu z izomorfizmu elektrických a tepelných sústav, resp. z analógie medzi nestacionárnym vedením tepla a prenosom elektrického náboja v idealizovanom uzavretom elektrickom obvode [3]. Praktickú aplikáciu takejto analógie pre popisovaný problém podrobnejšie popisujú nasledujúce kapitoly.

### 2.1 Matematicko-fyzikálny model

V súlade s dynamickou termoelektrickou analógiou, dynamický proces tepelnej výmeny medzi chladnúcim telesom a zahrievajúcou sa tekutinou je možné modelovať pomocou idealizovaného elektrického RC obvodu s dvoma kapacitormi  $C_b$ ,  $C_f$  a jedným, sériovo pripojeným rezistorom  $R$ , v ktorom elektrická kapacita vybijajúceho sa kapacitora

$$C_b = \left( \frac{Q}{U} \right)_b \Leftrightarrow (\rho V c_p)_b \quad (7)$$

predstavuje analógiu sústredenej tepelnej kapacity chladnúceho tuhého telesa, elektrická kapacita nabíjajúceho sa kapacitora

$$C_f = \left( \frac{Q}{U} \right)_f \Leftrightarrow (\rho V c_p)_f \quad (8)$$

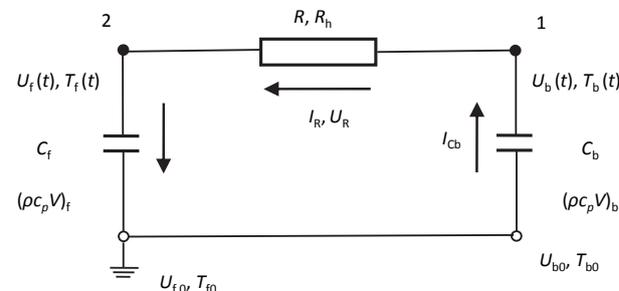
elektrickú analógiu sústredenej tepelnej kapacity zahrievajúcej sa tekutiny a elektrický odpor

$$R_{bf} = \left( \frac{U}{I} \right)_{bf} \Leftrightarrow \frac{1}{hS} \quad (9)$$

elektrickú analógiu úhrnného tepelného odporu okoliťého prostredia tekutiny pri kombinovanom transporte tepla konvekciou a radiáciou [3]. Premenné  $\rho$ ,  $V$ ,  $c_p$  s príslušnými indexmi ( $b$  pre chladnúce teleso,  $f$  pre obklopujúcu ho tekutinu a  $bf$  pre tepelný systém telesa obklopeného tekutinou) reprezentujú hustotu, objem a hmotnostnú tepelnú kapacitu pri stálom tlaku telesa v uvedenom poradí,  $Q$  je elektrický náboj,  $U$  je rozdiel potenciálov na príslušnom prvku elektrickej schémy,  $I$  je elektrický prúd pretekajúci jej rezistorom,  $h$  je

úhrnný koeficient kombinovaného transportu tepla konvekciou a radiáciou v látkovom prostredí tekutiny, zatiaľ čo  $S$  je celková teplovýmenná plocha medzi telesom a tekutinou.

Principiálna schéma aplikovanej dynamickej termoelektrickej analógie je uvedená na obr. 1.



Obr. 1 Principiálna schéma aplikovanej dynamickej termoelektrickej analógie medzi nestacionárnym transportom tepla v tuhom telese a prenosom elektrického náboja v idealizovanom uzavretom elektrickom obvode

Fig. 1 Schematic diagram of the applied dynamic thermoelectric analogy between non-stationary heat transfer and electric charge transfer in a closed electrical circuit

Podľa I. Kirchhoffovho zákona [10] sa sumy elektrických prúdov

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU(t)}{dt} \quad \text{a} \quad I = \frac{U}{R} \quad (10)$$

v uzloch 1 a 2 schémy uvedenej na obr. 1 musia rovnať nule, čo privedá k nasledovným vzťahom:

$$C_b \frac{dU_b(t)}{dt} = - \frac{U_b(t) - U_f(t)}{R} \quad (11)$$

a

$$C_f \frac{dU_f(t)}{dt} = \frac{U_b(t) - U_f(t)}{R}, \quad (12)$$

v ktorých  $(U_b - U_f)$  predstavuje elektrické napätie, resp. rozdiel potenciálov  $U_b$  a  $U_f$  na príslušných kapacitoroch  $C_b$  a  $C_f$  reprezentujúcich elektrické analógie okamžitej teploty telesa  $T_b$  a tekutiny  $T_f$ , zatiaľ čo  $t$  je premenná času. Elektrické prúdy, ktoré vstupujú do jednotlivých uzlov schémy sú kladné, kým prúdy z uzlov vystupujúce sú podľa konvencie záporné. Vzťah medzi elektrickým prúdom a napätím je zároveň kladný, ak prúd vstupuje do kladného pólu kapacitora, zatiaľ čo v opačnom prípade je tento vzťah záporný [10].

Po prechode od idealizovaného elektrického RC obvodu k popisovanému tepelnému systému dostávame sústavu diferenciálnych rovníc

$$T_b(t) = T_f(t) + \tau_f T_f'(t) \quad (13)$$

a

$$T_f(t) = T_b(t) + \tau_b T_b'(t), \quad (14)$$

v ktorej  $T_b$ ,  $T_f$ ,  $\tau_b$  a  $\tau_f$  reprezentujú okamžité teploty a relaxačné časy telesa (index  $b$ ) a obklopujúcej ho tekutiny (index  $f$ ) v uvedenom poradí. Čiarkami v hornom indexe príslušných premenných sú označené ich prvé derivácie podľa času. Smer elektrického prúdu v obvode uvedenom na obr. 1 bol zvolený tak, aby reprezentoval analógiu tepelného toku, ktorý v súlade s II. zákonom termodynamiky smeruje od teplejšieho miesta tepelného systému k miestu chladnejšiemu [11].

Za predpokladu, že relaxačné časy

$$\tau_b = RC_b = \frac{(\rho c_p L)_b}{h} \quad (15)$$

a

$$\tau_f = RC_f = \frac{(\rho c_p L)_f}{h}, \quad (16)$$

sú konštantné veličiny nezávislé od času, resp. od teploty, prederivovaním (14) podľa času dostávame výraz

$$T_f'(t) = T_b'(t) + \tau_b T_b''(t), \quad (17)$$

ktorý po dosadení do (13) s využitím (14) dáva diferenciálnu rovnicu

$$\tau_b \tau_f T_b''(t) + (\tau_b + \tau_f) T_b'(t) = 0, \quad (18)$$

resp. dynamickú tepelnú rovnicu modelujúcu chladnutie tuhého telesa v látkovom prostredí tekutiny, ktorá sa od neho v procese ich vzájomnej tepelnej interakcie zohrieva.

## 2.2 Analytické riešenie dynamickej tepelnej rovnice

Dynamická tepelná rovnica (18), po substitúciách

$$D = \tau_b \tau_f \quad \text{a} \quad F = \tau_b + \tau_f, \quad (19)$$

prechádza do lineárnej diferenciálnej rovnice druhého poriadku s konštantnými koeficientmi  $F$  a  $D$  v tvare [12]

$$T_b''(t) + \frac{F}{D} T_b'(t) = 0. \quad (20)$$

Jej exaktné analytické riešenie je možné nájsť napríklad metódou superpozície systému fundamentálnych riešení získaných prostredníctvom koreňov charakteristickej algebrickej rovnice, v danom prípade pomocou koreňov kvadratickej rovnice

$$r^2 + \frac{F}{D} r = 0, \quad (21)$$

prislúchajúcej k diferenciálnej rovnici (20) [13], ktorými sú

$$r_1 = 0 \quad \text{a} \quad r_2 = -\frac{F}{D}. \quad (22)$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (20) potom predstavuje superpozícia systému fundamentálnych riešení v tvare teplotnej funkcie

$$T_b(t) = K_1 + K_2 \exp\left(-\frac{F}{D} t\right). \quad (23)$$

Integračné konštanty  $K_1$  a  $K_2$  sa hľadajú zo vzťahu (23) v čase  $t = 0$ , ktorý poskytne konštantu

$$K_1 = T_b(0) - K_2 \quad (24)$$

a z jeho derivácie v čase  $t = 0$ , ktorá dáva konštantu

$$K_2 = -\frac{D}{F} T_b'(0). \quad (25)$$

Dosadením integračných konštant  $K_1$  a  $K_2$  do všeobecného riešenia (23) dostávame rovnicu

$$T_b(t) = T_b(0) + \frac{D}{F} T_b'(0) \left[1 - \exp\left(-\frac{F}{D} t\right)\right], \quad (26)$$

v ktorej

$$T_b'(0) = -\frac{T_b(0) - T_f(0)}{\tau_b}, \quad (27)$$

ako to vyplýva zo vzťahu (14).

Substitúcie (19) a (27) do (26) po jednoduchých úpravách privádzajú k partikulárnemu riešeniu tepelnej rovnice (18) v tvare teplotnej funkcie

$$T_b(t) = T_b(0) - \frac{\tau_f}{\tau_b + \tau_f} [T_b(0) - T_f(0)] \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau_b + \tau_f}{\tau_b \tau_f} t\right)\right] \quad (28)$$

popisujúcej časovú históriu okamžitej teploty tuhého telesa chladnúceho v okolitom prostredí tekutiny, ktorá sa od neho zohrieva.

Aplikácia rovnakého algoritmu umožňuje získať exaktné analytické riešenie sústavy diferenciálnych rovníc (13) a (14) aj pre premennú  $T_f(t)$ , a to v tvare teplotnej funkcie

$$T_f(t) = T_f(0) + \frac{\tau_b}{\tau_b + \tau_f} [T_b(0) - T_f(0)] \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau_b + \tau_f}{\tau_b \tau_f} t\right)\right] \quad (29)$$

popisujúcej časovú históriu okamžitej teploty tekutiny, ktorá sa od telesa v nej chladnúceho zohrieva.

## Diskusia analytického riešenia

Teplotné funkcie (28) a (29) v limitných prípadoch pre časy  $t \rightarrow 0$  nadobúdajú hodnoty  $T_b(0)$  a  $T_f(0)$ , čo zodpovedá začiatočným teplotám telesa a tekutiny v uvedenom poradí, zatiaľ čo v časoch  $t \rightarrow \infty$  majú hodnoty

$$T_b(t \rightarrow \infty) = T_b(0) - \frac{\tau_f}{\tau_b + \tau_f} [T_b(0) - T_f(0)] \quad (30)$$

a

$$T_f(t \rightarrow \infty) = T_f(0) + \frac{\tau_b}{\tau_b + \tau_f} [T_b(0) - T_f(0)] \quad (31)$$

závislé od pomeru relaxačných časov  $\tau_b$  a  $\tau_f$ . Čím vyššia je hodnota  $\tau_f$  v porovnaní s hodnotou  $\tau_b$ , tým výraznejší je vplyv teplotného rozdielu  $[T_b(0) - T_f(0)]$  na priebeh funkcií  $T_b(t)$  a  $T_f(t)$ ; s rastúcim  $\tau_f$  sa tekutina ohrieva menej a pomalšie, zatiaľ čo teleso v nej ochladne na nižšiu teplotu a rýchlejšie.

Za predpokladu, že

$$\tau_f \gg \tau_b, \quad (32)$$

teda v prípade, že sa tekutina v priebehu procesu chladnutia telesa v nej od telesa prakticky nezohreje,

$$\frac{\tau_f}{\tau_b + \tau_f} \cong 1 \quad (33)$$

a

$$\exp\left(-\frac{\tau_b + \tau_f}{\tau_b \tau_f} t\right) = \exp\left(-\frac{1}{\tau_f} - \frac{1}{\tau_b} t\right) \cong \exp\left(-\frac{1}{\tau_b} t\right), \quad (34)$$

teplotná funkcia (28) prejde do tvaru

$$T_b(t) = T_b(0) - [T_b(0) - T_f(0)] \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_b}\right)\right], \quad (35)$$

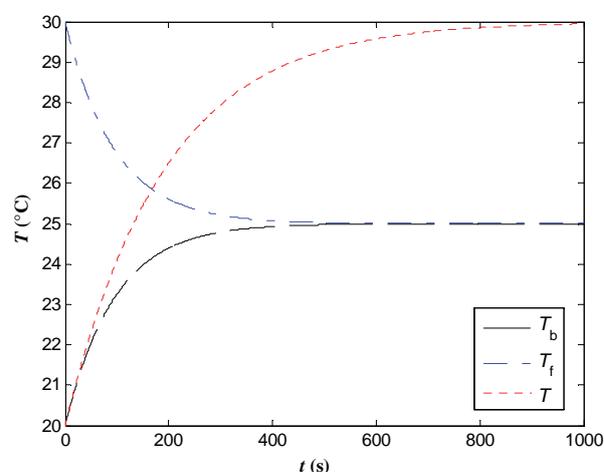
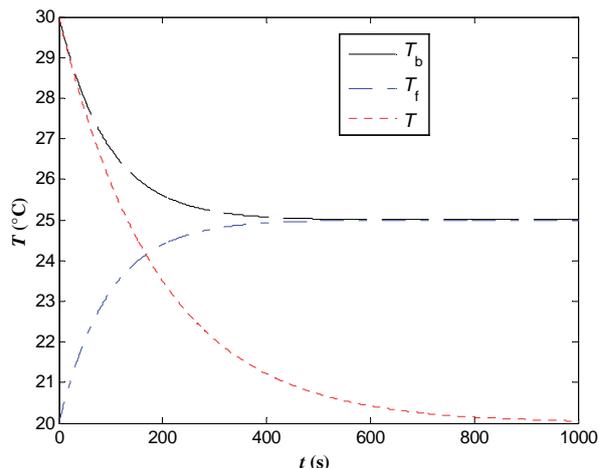
ktorý po elementárnej úprave a substitúciách

$$T_b(t) = T(t), \quad T_b(0) = T_0, \quad T_f(0) = T_\infty \quad \text{a} \quad \tau_b = \tau, \quad (36)$$

nadobudne tvar teplotnej funkcie modelu sústredenej tepelnej kapacity tuhého telesa chladnúceho s konštantným relaxačným časom  $\tau$ , začiatočnou teplotou  $T_0$  a konštantnou teplotou okolitého prostredia  $T_\infty$ , reprezentovanej dynamickým teplotným poľom (4).

V prípade, že začiatočná teplota telesa bude nižšia ako začiatočná teplota obklopujúcej ho tekutiny, bude sa táto od telesa počas procesu tepelnej výmeny ochladzovať, zatiaľ čo teleso sa bude od tekutiny zohrievať. Zmena smeru prúdu v schéme termoelektrickej analógie (obr. 1), korešpondujúca so zmenou smeru tepelného toku (tak, aby vyhovoval II. zákonu termodynamiky) však privádza k rovnakej sústave diferenciálnych rovníc (13) a (14), a teda aj k jej rovnakému analytickému riešeniu v tvare teplotných funkcií (28) a (29).

Simulované teplotné funkcie chladnúceho telesa a zohrievajúcej sa tekutiny (hore) a tekutiny, ktorá pri ohreve telesa od neho chladne (dolu), v porovnaní s teplotnou funkciou  $T(t)$  chladnúceho, resp. zohrievajúceho sa telesa v tekutine s konštantnou teplotou pre rovnaké relaxačné časy  $\tau_b = \tau_f$ , sú uvedené na obr. 2. Simulácia bola realizovaná v programovom prostredí pre inžinierske výpočty, matematické modelovanie a simulácie Matlab®.



Obr. 2 Simulované teplotné funkcie chladnúceho telesa a zohrievajúcej sa tekutiny (hore) a tekutiny, ktorá pri ohreve telesa v nej chladne (dolu) pre rovnaké relaxačné časy telesa a tekutiny

Fig. 2 Simulated temperature function of the cooling body (above) and the heated fluid (down) for the same relaxation times of solids and liquids

## Záver

V prezentovanej práci je popísaný algoritmus odvodenia dynamických matematicko-fyzikálnych modelov tepelnej výmeny tuhého telesa a okolitého prostredia tekutiny s variabilnou teplotou, ktorá je determinovaná ich vzájomnými tepelnými interakciami v simultánne bežiacich procesoch ochladzovania a ohrevu. Tepelná výmena medzi telesom a tekutinou je modelovaná prostredníctvom diferenciálnych tepelných rovníc systému sústredenej tepelnej kapacity pre kombinovaný prenos tepla konvekciou a radiáciou s aplikáciou termoelektrickej analógie medzi nestacionárnym prenosom tepla a prenosom elektrického náboja v uzavretom idealizovanom elektrickom obvode. Podrobná analýza obdržaného riešenia tepelných rovníc v tvare teplotných funkcií aproximujúcich časovú históriu teploty telesa a tekutiny preukázala, že odvodené teplotné funkcie predstavujú zovšeobecnené analytické riešenie teplottransportného

problému systému sústredenej tepelnej kapacity tuhého telesa v látkovom prostredí obklopujúcej ho tekutiny ako pre chladnutie telesa (ohrev tekutiny), tak i pre jeho ohrev (ochladzovanie tekutiny). Prostredníctvom relaxačných časov tuhého telesa a tekutiny, ktoré v týchto modeloch figurujú, je možné identifikovať, ako aj prediktovať ich tepelné vlastnosti reprezentované úhrnným tepelným odporom pri kombinovanom prestupe tepla konvekciou a radiáciou a hmotnostnou tepelnou kapacitou pri konštantnom tlaku. V prípade, že nie je splnená podmienka malého Biotovho čísla ( $\beta$ ), model sústredenej tepelnej kapacity nie je dostatočne vierohodným matematicko-fyzikálnym modelom reálneho procesu tepelných interakcií tuhého telesa s jeho tekutým okolím, ktoré je nevyhnutné modelovať prostredníctvom Fourierovej, resp. Fourier-Kirchhoffovej rovnice nestacionárneho tepla [4] a jej riešenie obvykle hľadať numerickými metódami [2].

#### Pod'akovanie

*Autori ďakujú slovenskej grantovej agentúre KEGA za finančnú podporu pri riešení projektu KEGA 005 TNuAD-4/2016, ďalej projektom RMTVC No. LO1203 a SGS SP2016/94, v rámci ktorých uvedený príspevok vznikol.*

#### Literatúra

- [1] LIENHARD, J. H. IV., LIENHARD, J. H. V. *A Heat Transfer Textbook*. Cambridge: Phlogiston Press, 2004.
- [2] WENDLI, M. C. *Fundamentals of Heat Transfer Theory and Applications*. Washington: Department of Mechanical Engineering and School of Medicine, Saint Louis University, 2005.
- [3] O'SULLIVAN, C. T. Newton's Law of Cooling - A Critical Assessment. *Amer. J. Phys.*, 58 (1990) 10, 956-960.
- [4] HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER J. *Fundamentals of Physics*. New York: Wiley, 2005.
- [5] PLAWSKY, J. L. *Transport Phenomena Fundamentals*. London: CRC Press, 2001.
- [6] WENDLI, M. C. *Fundamentals of Heat Transfer Theory and Applications*. Washington: Department of Mechanical Engineering and School of Medicine, Saint Louis University, 2005.
- [7] *Ashare Handbook 2001 Fundamentals*. Atlanta: ASHARE, 2001.
- [8] ATKINSON, A. C., DONEV, A. N. *Optimum Experimental Designs*. Oxford: Oxford Science Publications, 1992.
- [9] JUODVALKIS, J., BLAŽEVIČIUS, E., VIPARTAS, R. A. Methods of unstable heat transfer calculations and experimental verification. *Energetika*, 2 (2004) 33-39.
- [10] MALDAGUE, X. *Theory and Practice of Infrared Technology for Non Destructive Testing*. New York: Wiley, 2001.
- [11] JANNA, W.S. *Heat transfer laboratory*. Memphis: Department of Mechanical Engineering, University of Memphis, 2006.
- [12] DEMETRIAN, M. *Aplikovaná matematika*. Bratislava: FMFI UK, 2007.
- [13] MATEJIDES, M. *Aplikovaná matematika*. Zvolen: MAT-CENTRUM, 2005.

---

## Ocel: jemné pozitívne signály na trhu, ohrožení z Bruselu

*Westdeutsche Allgemeine*

08.11.2016

Hospodárske združenie Ocel (WV Stahl) vidí ocelárskou branžou aktuálne na rozcestí. Konjunktúra je na ceste ke zlepšeniu, dobrá nálada ale v odvetvi nepanuje. Podnikom dedia najväčšie starosti projednávané pravidla obchodu s emisnými právy a obchodná politika EÚ. „Přicházejí politická rozhodnutí, která nastaví výhybky pro budoucnost ocelářského průmyslu v Německu a v Evropě,“ vysvětluje Hans Jürgen Kerkhoff, prezident hospodárskeho združenia WV Stahl. „Jemné pozitívne signály pro ocelářskou konjunkturu nemění nic na nutnosti, aby politika v Bruselu a v Berlíně vytvořila správný rámec pro budoucnost“. Pro rok 2016 WV Stahl očekává celkově vyrobené množstvá surové oceli ve výši 42,5 mil. tun, což je lehký pokles proti loňskému roku, kdy bylo vyrobeno celkem 42,7 mil. tun.

## Konjunktúra množstvá vyrobené oceli se stabilizovala

*Stahl Aktuell*

16.11.2016

Aktuálne vysoká volatilita na surovinových trzích zatěžuje i ocelářskou konjunkturu. Konjunkturální základní tendence je ale vzhledem k trvajícím stabilnímu vývoji u zpracovatelů oceli, jakož i k nízkému stavu zásob u obchodníků a zpracovatelů lehce stoupající. Zotavení je ale podle WV Stahl překrýváno trvajícím strukturálními krizí ve světovém ocelářském průmyslu a nevyřešené importní krizi na evropském ocelářském trhu. V průběhu roku 2016 se množstevní konjunktúra v Německu stabilizovala: v letním čtvrtletí se příchod zakázek u válcované oceli zvýšil o 2 %. Ve srovnání se stejným obdobím loňského roku to bylo třetí zvýšení po sobě. Impulzy přicházely jak z domácího trhu, tak ze zahraničí. Stav zakázek překročil s 6,7 mil. tun v září hodnotu loňského roku o čtvrtinu.