

# Recenzované vedecké články

## Vývoj riešenia Kármánovej diferenciálnej rovnice

## Development of a Solution of Karman's Differential Equation

doc. Ing. Rudolf Pernis, CSc.<sup>1</sup>; doc. Dr. Ing. Milan Škrobán, CSc.<sup>2</sup>; Ing. Miroslav Polásek<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Farnet s.r.o., Robotnícka 4334, 017 01 Považská Bystrica, Slovenská republika

<sup>2</sup> Inoval – Slovenská akadémia vied, Priemyselná 525, 965 01 Žiar nad Hronom, Slovenská republika

<sup>3</sup> Fakulta Špeciálnej techniky, Trenčianska univerzita Alexandra Dubčeka v Trenčíne, 911 50 Trenčín, Slovenská republika

*Výpočet stredného normálového napätia materiálu na valce na základe matematickej teórie procesu valcovania vykonali mnohí autori. Dvojrozmerná diferenciálna rovnica normálových napätí pri dvojrozmernej deformácii je základom všetkých teórií valcovania, ktoré prvýkrát publikoval Kármán. Riešenia vždy vychádzajú z určitých zjednodušení diferenciálnej rovnice, ktorá popisuje geometriu tvaru kruhového valca. Zjednodušenie popisu geometrie pracovného valca je založené na aproximácii kruhového oblúka, ktorý je v styku s valcovaným materiálom. Kruhový oblúk valca je aproximovaný jednoduchšími krivkami. Postupne sú to krivky: lomená krivka, priamka a parabola. Posledné riešenie predstavuje použitie kruhového oblúka vo forme kružnice. Kármánovu diferenciálnu rovnicu v podstate tvoria dve diferenciálne rovnice, kde jedna popisuje oblasť zaostávania a druhá oblasť predbiehania. Normálové napätie na valce je počítané ako pomerné napätie, ktoré je normalizované hodnotou základného aktuálneho deformačného odporu. Funkcia, ktorá umožňuje výpočet pomerného bezrozmerného napätia je nazvaná ako sigma funkcia. Pre výpočet strednej hodnoty pomerného napätia je uvedený výpočet súradnice neutrálneho bodu. Z priebehu sigma funkcie v oblasti zaostávania a oblasti predbiehania je vypočítaná stredná hodnota sigma funkcie. Stredná hodnota sigma funkcie umožňuje výpočet celkovej valcovacej sily. Predložené výpočty predpokladajú konštantný základný deformačný odpor, čo je použiteľné pre valcovanie za tepla. Z porovnania jednotlivých spôsobov výpočtu normálového napätia z nameranými hodnotami normálového napätia vyplýva, že najnižšie odchyľky dáva riešenie Kármánovej diferenciálnej rovnice s aplikáciou rovnice kružnice.*

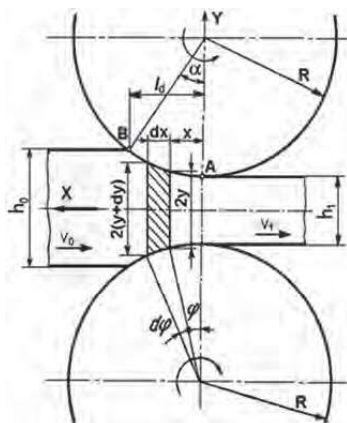
**Kľúčové slová:** pozdĺžne valcovanie; Kármánova diferenciálna rovnica; normálové napätie; relatívne napätie; aproximácia kruhového oblúka

*The calculation of the mean normal stress that rolled material exerts on the rolls is based on a mathematical theory of the rolling process. Such calculations were carried out by many authors. The two-dimensional differential equation of normal stresses in two-dimensional deformation is the basis of all rolling theories first published by Karman. The solutions are always based on certain simplifications of a differential equation, which describes the geometry of the shape of a circular cylinder. The simplification of the description of work roll geometry is based on approximation of a circular arc that is in contact with rolled material. The circular arc of the cylinder is approximated by the simpler curves. Such curves are as follows: polyline, straight line and parabola. The newest approach consists in the use of a circular arc in a form of a circle. The Karman differential equation consists of two differential equations, one describing backward slip zone and another forward slip zone. The normal contact stress exerted on the cylinder is calculated as relative contact stress, which is normalized by the value of the flow stress. The function that allows the calculation of relative dimensionless stress is called the sigma function (average relative normal contact stress). The calculation of coordinates of neutral point is given for calculation of a mean value of relative normal contact stress. The mean value of the sigma function is calculated from the sigma function in the forward slip, as well as in the backward slip zone. The mean value of the sigma function allows the calculation of a total rolling force. The calculations assume constant flow stress. Comparison with the measured values shows that a solution of Karman's differential equation with the application of a circle equation gives the lowest deviations.*

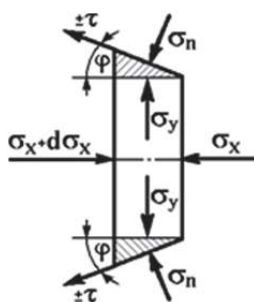
**Key words:** lengthwise rolling; Karman's differential equation; normal stress; relative stress; contact arc approximation

Rovnováhu síl vo valcovacej medzere pri pozdĺžnom valcovaní vyjadruje diferenciálna rovnica dvojdimenzionálna deformácie, ktorú ako prvý predložil Kármán, ešte v roku 1925 [1]. Je to najcitovanejšia práca riešiteľov Kármánovej diferenciálnej rovnice. Pre teóriu valcovania a platnosť diferenciálnej rovnice vyslovil nasledovné podmienky:

- valcovaný materiál pravouhlého prierezu s pôvodnou hrúbkou  $h_0$  je valcovaný medzi hladkými valcami s polermi  $R$  na hrúbku  $h_1$ , kde na vývalok nepôsobí ťah a ani brzdný účinok,
- počas valcovania nenastáva šírenie,
- koeficient trenia  $f$  je na tlakovej ploche valcov konštantný,
- v smere pozdĺžnej osi vertikálne rezy vývalku zostávajú ploché, bez ohybu (paralelné),
- valce vo valcovacej medzere nie sú pružne deformované,
- valcovaný materiál je homogénny a nepodlieha pružnej deformácii,
- podmienkou plasticity je stálosť najväčšieho šmykové napätia  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_a$  (rozdiel hlavných napätí rovný základnému aktuálnemu deformačnému odporu),
- deformačný odpor vývalku vo valcovacej medzere vo smere pozdĺžnej osi je konštantný (nedochádza k spevňovaniu valcovaného materiálu),
- rozsah rýchlosti valcovania je konštantný.



Obr. 1 Charakteristika geometrie valcovacej medzery  
Fig. 1 Determination of geometric relationships



Obr. 2 Napätia pôsobiace na element  
Fig. 2 Tensions acting on the element

Geometria valcovacej medzery je uvedená na obr. 1. Vo všeobecnej polohe je nakreslený a zakótovaný aj diferenciálny element. Sily pôsobiace na tento element musia byť v rovnováhe (obr. 2). Na základe síl pôsobiacich na vybraný element je odvodená diferenciálna rovnica rozloženia tlakov na valce, pričom je zohľadnené pásmo predbiehania a zaostávania. Stav napätosti popisuje Kármánova diferenciálna rovnica, ktorá vznikla z rovnováhy síl do smeru osy X

$$\frac{d\sigma_x}{dx} - \frac{\sigma_n - \sigma_x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \pm \frac{\tau}{y} = 0, \quad (1)$$

kde horné znamienko (+) platí pre oblasť zaostávania (vstup materiálu do valcov má menšiu rýchlosť ako obvodová rýchlosť valcov). Dolné znamienko (-) je pre oblasť predbiehania (výstup materiálu z valcov má vyššiu rýchlosť ako obvodová rýchlosť valcov). Napätie  $\sigma_n$  predstavuje normálové napätie, tlak na valce a napätie  $\tau$  určuje šmykové napätie medzi valcami a valcovaným materiálom. Premenné  $x$  a  $y$  predstavujú geometrické súradnice povrchu valca dotýkajúceho sa valcovaného materiálu. Neznáme horizontálne napätie  $\sigma_x$  určíme z rovnice plasticity. Je použitá Trescova podmienka plasticity

$$\sigma_y - \sigma_x = \sigma_a, \quad (2)$$

kde najväčšie hlavné napätie (vertikálne)  $\sigma_y$  je určené z rovnováhy síl do smeru osy Y

$$\sigma_y = \sigma_n \mp \tau \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (2a)$$

Pretože je  $\tau < \sigma_n$  a taktiež uhol  $\varphi$  je malý, možno približne písať  $\sigma_y \doteq \sigma_n$  a najmenšie hlavné napätie je horizontálne napätie  $\sigma_x$ . Napätie  $\sigma_a$  predstavuje základný aktuálny deformačný odpor valcovaného materiálu. Vo výpočtoch je uvažované premenlivé šmykové napätie. Šmykové napätie  $\tau$  je priamoúmerné normálovému napätiu, tlaku valcovaného materiálu na valce  $\sigma_n$

$$\tau = f \cdot \sigma_n. \quad (3)$$

Konštantu úmernosti  $f$  predstavuje koeficient trenia medzi valcami a valcovaným materiálom. Po dosadení rovníc (2) a (3) do diferenciálnej rovnice (1) sa v nej vyskytuje už len jedna premenná vyjadrujúca napätie a geometrické súradnice povrchu valca

$$\frac{d\sigma_n}{dx} - \frac{\sigma_a}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \pm \frac{f}{y} \cdot \sigma_n = 0. \quad (4)$$

V tejto diferenciálnej rovnici vystupujú dve konštanty: základný aktuálny deformačný odpor  $\sigma_a$  a koeficient trenia  $f$ . Podľa vzoru riešenia, ktoré predložil Kármán, diferenciálnu rovnicu normalizoval podľa základného aktuálneho deformačného odporom  $\sigma_a$ , čo umožnilo zaviesť pomerné (relatívne) bezrozmerné normálové napätie  $\bar{\sigma}_n$

$$\bar{\sigma}_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_a}. \quad (5)$$

Označenie  $\bar{\sigma}_n$  predstavuje  $\bar{\sigma}$ -funkciu (čítaj: sigma funkcia). Rovnica (4) nadobudne upravený tvar

$$\frac{d\bar{\sigma}_n}{dx} - \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \pm \frac{f}{y} \cdot \bar{\sigma}_n = 0. \quad (6)$$

Normalizácia napätia umožnila z diferenciálnej rovnice (6) vylúčiť materiálovú konštantu – základný deformačný odpor  $\sigma_a$ . Tým sa diferenciálna rovnica (6) stala nezávislou od valcovaného materiálu. Z matematického pohľadu táto diferenciálna rovnica predstavuje lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu s pravou stranou. Riešenie diferenciálnej rovnice (6) uvádza Smirjagin [2] v nasledovnej podobe

$$\bar{\sigma}_n = e^{\pm f \int \frac{dx}{y}} \cdot \left( C + \int \frac{1}{y} \cdot e^{\mp f \int \frac{dx}{y}} \cdot dy \right), \quad (7)$$

kde  $C$  predstavuje integračnú konštantu. V skutočnosti sú to dve konštanty, jedna pre oblasť zaostávania a druhá pre oblasť predbiehania. Súradnice  $x$  a  $y$  definujú geometriu valca, ktorý sa dotýka valcovaného materiálu. V diferenciálnej rovnici (6) funkčnú závislosť  $y = f(x)$  predstavuje rovnica kružnice

$$x^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (8)$$

Konštantu  $y_0$  udáva posunutie stredu valca mimo počiatku súradnicového systému  $[X, Y]$ . Hodnota posunutia  $y_0$  je daná rovnicou

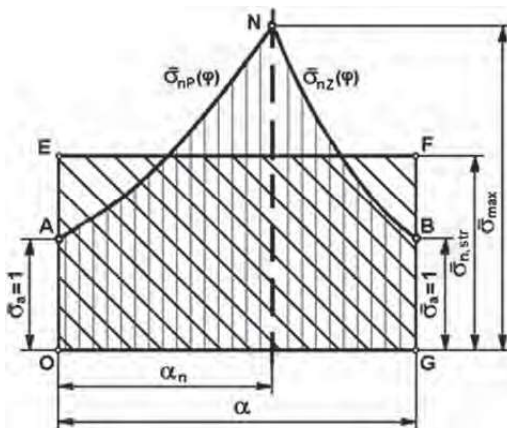
$$y_0 = \frac{h_1}{2} + R. \quad (9)$$

Po dosadení rovnice kružnice (8) do diferenciálnej rovnice (6) vznikne diferenciálna rovnica, kde napätie je funkciou jednej premennej (presnejšie súradnice  $x$ )

$$\frac{d\bar{\sigma}_n}{dx} - \frac{1}{\frac{h_1}{2} + R - \sqrt{R^2 - x^2}} \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \pm f \cdot \bar{\sigma}_n \right) = 0. \quad (10)$$

Z diferenciálnej rovnice (10) po vyriešení dostaneme dve rovnice. Jedna rovnica  $\bar{\sigma}_{n,z} = \bar{\sigma}_{n,z}(x)$  popisuje distribučnú krivku rozdelenia normálového napätia (valcovacieho tlaku) v pásme zaostávania. Druhá rovnica  $\bar{\sigma}_{n,p} = \bar{\sigma}_{n,p}(x)$  popisuje distribučnú krivku rozdelenia normálového napätia (valcovacieho tlaku) v pásme predbiehania. Priesečník oboch kriviek udáva neutrálny bod N, ktorý vypočítame z rovnice (súradnica  $x_n$ )

$$\bar{\sigma}_{n,z}(x_n) = \bar{\sigma}_{n,p}(x_n). \quad (11)$$



Obr. 3 Stredná hodnota relatívneho normálového napätia  $\bar{\sigma}_{n,avr}$   
Fig. 3 The average relative normal contact stress  $\bar{\sigma}_{n,avr}$

Priesečník kriviek je charakterizovaný neutrálnym uhlom  $\alpha_n$  (obr. 3). V neutrálnom bode rýchlosť horizontálneho pohybu valcovaného materiálu je rovná obvodovej rýchlosti otáčajúcich sa valcov. Výpočet valcovacej sily  $F_v$  určíme prostredníctvom strednej hodnoty relatívneho normálového napätia  $\bar{\sigma}_{n,avr}$ .

Priebeh pomerného normálového tlakového napätia na valce v pásme deformácie je uvedený na obr. 3, krivka ANB. Stanovenie valcovacej sily si však vyžaduje strednú hodnotu pomerného normálového (tlakového) napätia  $\bar{\sigma}_{n,avr}$  pre celý oblúk záberu  $\alpha$  – napäťová plocha obdĺžnika OEFGO (obr. 3). Výpočet strednej hodnoty vychádza z rovnosti napäťových plôch OANBGO a plochy obdĺžnika OEFGO. Vzhľadom na normalizačnú rovnicu (5), ten istý princíp platí tiež pre pomerné normálové (tlakové) napätie, teda  $\bar{\sigma}_n$ – funkciu. Výpočet uskutočnime v polárnych súradniciach ( $\sigma$ –)

$$\bar{\sigma}_{n,avr} = \frac{1}{\alpha - 0} \cdot \int_0^\alpha \bar{\sigma}_n(\varphi) \cdot d\varphi. \quad (12)$$

Konkrétny výpočet strednej hodnoty normálového napätia  $\bar{\sigma}_{n,avr}$  musí byť počítaný samostatne pre oblasť zaostávania a tiež pre oblasť predbiehania

$$\bar{\sigma}_{n,avr} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left[ \int_0^{\alpha_n} \bar{\sigma}_{n,p}(\varphi) \cdot d\varphi + \int_{\alpha_n}^\alpha \bar{\sigma}_{n,z}(\varphi) \cdot d\varphi \right]. \quad (13)$$

Výslednú silu pôsobiacu počas valcovania na valec udáva rovnica

$$F_v = \bar{\sigma}_{n,avr} \cdot \sigma_a \cdot l_d \cdot b_s, \quad (14)$$

kde  $b_s$  predstavuje strednú šírku vývalku a  $l_d$  predstavuje dĺžku horizontálnej projekcie oblúka záberu,

$$l_d = \sqrt{R(h_0 - h_1)}. \quad (15)$$

Podobným spôsobom je možné určiť krútiaci moment potrebný na prekonanie celkového deformačného odporu valcovaného materiálu.

## 1. Riešenie diferenciálnej rovnice (6)

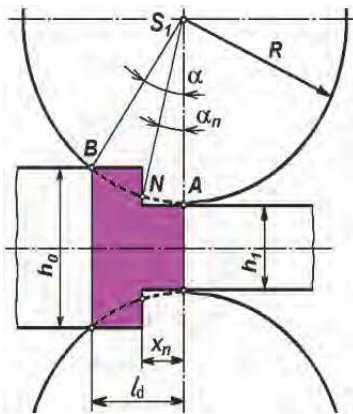
Diferenciálna rovnica (6) v tejto podobe nemá známe analytické riešenie. Preto mnoho riešiteľov hľadalo riešenie prostredníctvom aproximácie kruhového oblúka inými krivkami, ktoré by umožnilo zjednodušené analytické riešenie diferenciálnej rovnice (6). Najjednoduchšia náhrada kruhového oblúka valca bola lomená čiara (polyline) Korolev [3], Brzobohatý [4]. V ďalšom kroku spresňovania riešenia bola použitá priamka Celikov [5]. Ďalšie riešenia diferenciálnej rovnice (6) použili parabolu Blad a Ford [6], Sims [7], Tselikov [8], Pernis [9, 10]. Najnovšie riešenie diferenciálnej rovnice (6), resp. (10) použilo presnú definíciu kruhového oblúka valca, rovnicu kružnice Pernis a Kvackaj [11].

### 1.1 Riešenie podľa Koroleva

Na začiatok je tu uvedená poznámka k autorstvu riešenia Korolevova [3]. Riešenie náhrady kruhového oblúka BA lomenou čiarou uvádza už Brzobohatý [4], ale bez citácie

pôvodcu riešenia. Ruskí autori Smirjagin a kol. [2] uvádzajú tento spôsob výpočtu ako "metóda pečovania", bez priradenia autorstva Korolevovi. Korolev toto riešenie v [3] vydáva za vlastné riešenie diferenciálnej rovnice (6). Riešenie spočíva v tom, že hladký valec (kruhový oblúk) je nahradený za paralelne stupňovité zápustky (ako pri kovaní), ako to ukazuje obr. 4. Oblúk BA je nahradený lomenou čiarou. Deliacim bodom je rozhranie oblastí zaostávania a predbiehania. Tento bod N je označený ako neutrálny bod. Poloha neutrálneho bodu je určená súradnicou  $x_n$  alebo neutrálnym uhlom  $\alpha_n$

$$x_n = l_d \cdot \frac{h_1}{h_0 + h_1}, \quad (16)$$



Obr. 4 Kontaktný oblúk BA podľa Koroleva (stupňová aproximace)  
Fig. 4 The contact arc BA according to Korolev (stepped approximation)

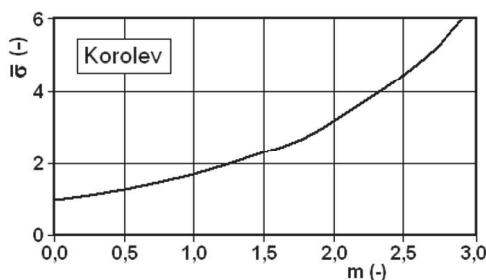
V úseku  $\alpha$  až  $\alpha_n$  je súradnica  $y$  aproximovaná hodnotou  $y = h_0/2$ . Pre úsek  $\alpha_n$  až  $0$  je súradnica  $y$  aproximovaná hodnotou  $y = h_1/2$ . Na základe tohoto zjednodušeného popisu geometrie valcov, pre stredný pomerný valcovací tlak bola odvodená rovnica, Korolevova  $\bar{\sigma}$  – funkcia

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{Kor} &= \bar{\sigma}_{n,str} \\ \bar{\sigma}_{Kor} &= \frac{e^{m_{Kor}} - 1}{m_{Kor}}, \end{aligned} \quad (17)$$

kde konštanta  $m_{Kor}$  je daná výrazom

$$m_{Kor} = f \cdot \frac{l_d}{h_s}. \quad (18)$$

Označenie  $h_s$  udáva strednú hrúbku vývalku. Korolevova rovnica (17) predstavuje najjednoduchšiu rovnicu pre výpočet hodnoty  $\bar{\sigma}$  – funkcie. Grafická vizualizácia Korolevovej rovnice (17) je uvedená na obr. 5.



Obr. 5 Závislosť Korolevovej  $\bar{\sigma}$  – funkcie na konštante  $m$   
Fig. 5 Dependence of Korolev's  $\bar{\sigma}$  – function on the constant  $m$

## 1.2 Riešenie podľa Celikova

Riešenie, ktoré predložil Celikov [5], vychádza opäť z diferenciálnej rovnice (6). Toto riešenie nahrádza kruhový oblúk BA priamkou, rovnica (19), ak to uvádza obr. 6.

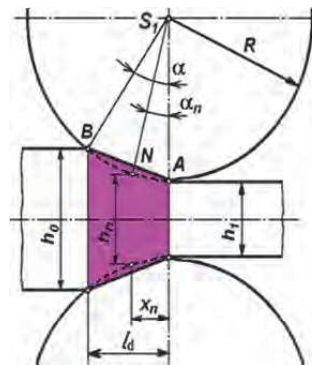
$$y = \frac{h_1}{2} + \frac{h_0 - h_1}{2l_d} \cdot x \quad (19)$$

Polohu neutrálneho bodu určuje neutrálnou hrúbkou  $h_n$  z rovnice

$$h_n = h_1 \cdot \left[ \frac{1}{m+1} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + (m^2 - 1) \cdot \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^m} \right) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (20)$$

kde konštanta  $m = m_{Cel}$  a je daná výrazom

$$m_{Cel} = 2f \cdot \frac{l_d}{h_0 - h_1}. \quad (21)$$



Obr. 6 Kontaktný oblúk BA podľa Celikova (přímková aproximace)  
Fig. 6 The contact arc BA according to Tselikov (straight line approximation)

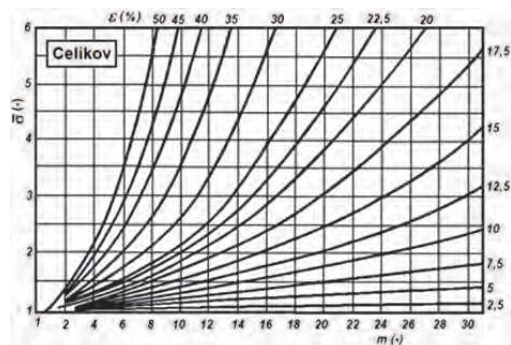
Na základe náhrady kruhového oblúka priamkou BA (obr. 6). Pre stredný valcovací tlak bola odvodená rovnica, Celikova sigma-funkcia  $\bar{\sigma}_{Cel} = \bar{\sigma}_{n,str}$

$$\bar{\sigma}_{Cel} = \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(m_{Cel}-1)} \cdot \frac{h_n}{h_1} \cdot \left[ \left(\frac{h_n}{h_1}\right)^{m_{Cel}} - 1 \right], \quad (22)$$

kde premenná  $\varepsilon$  udáva pomernú deformáciu pri valcovaní

$$\varepsilon = \frac{h_0 - h_1}{h_0}. \quad (23)$$

Celikova rovnica (22) pre hodnotu  $m_{Cel} = 1$ , nespĺňa podmienku spojivosti. Grafická vizualizácia Celikovej rovnice (22) je uvedená na obr. 7.

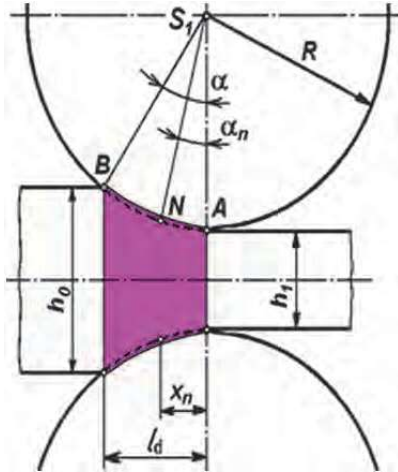


Obr. 7 Závislosť Celikovej  $\bar{\sigma}$  – funkcie na konštante  $m$   
Fig. 7 Dependence of Tselikov's  $\bar{\sigma}$  – function on the constant  $m$

### 1.3 Riešenie podľa Blanda a Forda

Toto riešenie Bland a Ford [6] publikovali už v roku 1948. Analytické riešenie výpočtu hodnoty  $\bar{\sigma}$  – funkcie, je uskutočnené za predpokladu, kde kruhový oblúk BA je aproximovaný parabolou v polárnych súradniciach

$$y = \frac{h_1}{2} + R \cdot \frac{\varphi^2}{2}. \quad (24)$$



Obr. 8 Kontaktný oblúk BA podľa Blanda a Forda (parabolická aproximácia)

Fig. 8 The contact arc BA according to Bland and Ford (parabola approximation)

Riešenie využíva doterajšie poznanie, že oblasť BN predstavuje pásmo zaostávania a oblasť NA je oblasť predbiehania (obr. 8). Neutrálny uhol  $\alpha_n$  definuje rovnica

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{h_1}{R}} \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{R}{h_1}} \cdot \alpha \right) - \frac{1}{4f} \sqrt{\frac{h_1}{R}} \cdot \ln \frac{h_0}{h_1} \right]. \quad (25)$$

Riešitelia zavádzajú novú premennú  $t$ , ktorá je definovaná ako pomer uhlovej súradnice  $\varphi$  a koeficientu trenia  $f$

$$t = \frac{\varphi}{f}. \quad (26)$$

Odpovedajúce hodnoty uhla záberu  $\alpha$  a neutrálneho uhla  $\alpha_n$  novej premennej  $t$  sú určené vzťahom

$$t_\alpha = \frac{1}{m} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}, \quad (27)$$

$$t_n = \frac{1}{m} \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \right) + \frac{1}{4m} \ln(1-\varepsilon) \right], \quad (28)$$

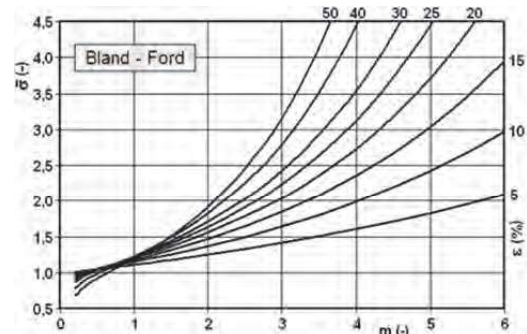
Bland a Ford predstavili nasledovnú rovnicu pre výpočet hodnôt  $\bar{\sigma}$  – funkcie  $\bar{\sigma}_{Bla-Ford} = \bar{\sigma}_{n,str}$

$$\bar{\sigma}_{Bla-Ford} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} m \left[ (1-\varepsilon) e^{2m \cdot \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \right)} \cdot \int_{t_n}^{t_\alpha} (1 + m^2 t^2) e^{-2m \cdot \operatorname{arctg}(mt)} \cdot dt + \int_0^{t_n} (1 + m^2 t^2) e^{2m \cdot \operatorname{arctg}(mt)} \cdot dt \right], \quad (29)$$

kde Bland–Fordova konštanta  $m = m_{Bla-Ford}$  má hodnotu

$$m_{Bla-Ford} = f \cdot \sqrt{\frac{R}{h_1}}. \quad (30)$$

Konečná rovnica (29) pre výpočet hodnôt Bland–Fordovej  $\bar{\sigma}$  – funkcie je komplikovaná. Integrovanie tejto rovnice nemá známe riešenie a výsledok je možné získať len numerickou integráciou. Integračné hranice  $t_\alpha$  a  $t_n$  udávajú rovnice (27) a (28). Pre numerickú integráciu je možné použiť Simpsonove pravidlo, ak ho uvádza Rektorys a kol. [12]. Angot [13] pre numerickú integráciu uvádza menej používaný Weddleov vzorec. Weddleova numerická integrácia k požadovanej presnosti konverguje 4krát rýchlejšie ako Simpsonova. Angot [13] uvádza: *Weddleov vzorec je jeden z najlepších vzorcov pre numerickú integráciu vzhľadom k jeho jednoduchosti.* Grafická vizualizácia Bland-Fordovej rovnice (29) je uvedená na obr. 9.



Obr. 9 Závislosť Bland-Fordovej sigma funkcie na konštante  $m$

Fig. 9 Dependence of Bland-Ford sigma functions on the constant  $m$

### 1.4 Riešenie podľa Simsa

Toto riešenie Sims [7] publikoval v roku 1954. Analytické riešenie výpočtu hodnoty  $\bar{\sigma}$  – funkcie, je uskutočnené za predpokladu, že kruhový oblúk BA je aproximovaný parabolou, ako to vyjadruje rovnica (24). Táto aproximácia kruhového oblúka je zhodná s riešením Bland-Forda podľa grafickej interpretácie v obr. 8. V riešení diferenciálnej rovnice (6) Sims predpokladá, že šmykové napätie  $\tau$  medzi vývalkom a valcami nie je väčšie ako polovičná hodnota základného aktuálneho deformačného odporu  $\sigma_a$

$$\tau = f \cdot \sigma_n \leq \frac{\sigma_a}{2}. \quad (31)$$

To znamená, že šmykové napätie  $\tau$  (súčin  $f \cdot \sigma_n$ ) v rovnici (4) je nahradený konštantnou hodnotou napätia  $\sigma_a/2$ . Podľa tvrdenia Simsa [7] rovnicu plasticity prebral od Orowana [14], ktorá má tvar

$$\sigma_n - \sigma_x = \frac{\pi}{4} \sigma_a. \quad (32)$$

Substitúcia pravej strany rovnice (31) spôsobí v diferenciálnej rovnici (6) to, že z nej vypadne koeficient trenia. Distribučné rovnice popisuje rozdelenie pomerného normálového napätia pre oblasť zaostávania  $\bar{\sigma}_{nZ}$  a pre oblasť predbiehania  $\bar{\sigma}_{nP}$

$$\bar{\sigma}_{nZ} = \frac{\pi}{4} \ln \frac{h}{h_0} + \frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{R}{h_1}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{R}{h_1}} \cdot \alpha \right) - \sqrt{\frac{R}{h_1}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{R}{h_1}} \cdot \varphi \right) \quad (33)$$

$$\bar{\sigma}_{nP} = \frac{\pi}{4} \ln \frac{h}{h_1} + \frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{R}{h_1}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{R}{h_1}} \cdot \varphi \right) \quad (34)$$

Pomer neutrálnej hrúbky k výstupnej hrúbke  $h_n/h_1$  určil z rovnice

$$\frac{h_n}{h_1} = 1 + \operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{h_1}{R'}} \cdot \ln(1 - \varepsilon) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \right) \right]^2 \quad (35)$$

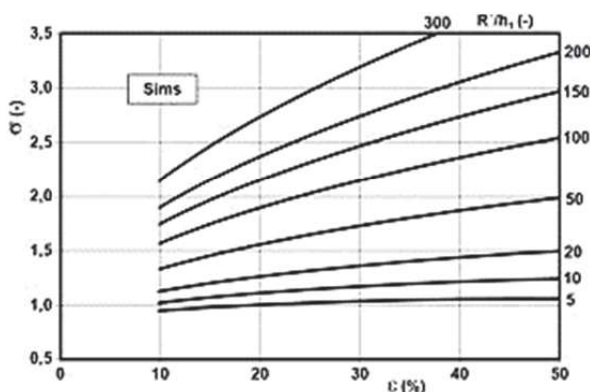
Sims predstavil nasledovnú rovnicu pre výpočet hodnôt  $\bar{\sigma}$  – funkcie  $\bar{\sigma}_{Sim} = \bar{\sigma}_{n, str}$

$$\bar{\sigma}_{Sim} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \right) - \frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{\frac{R'}{h_1}} \cdot \ln \frac{h_n}{h_1} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{\frac{R'}{h_1}} \cdot \ln \frac{1}{1-\varepsilon} \quad (36)$$

Za polomer valcov  $R'$  v rovnicach (33) až (36) dosadzuje polomer splošteného valca, ktorý počíta z Hitchcockovej rovnice

$$R' = R \left[ 1 + \frac{16(2-\nu^2)}{\pi E} \cdot \frac{F_v}{b_s(h_0-h_1)} \right], \quad (37)$$

kde  $E$  predstavuje modul pružnosti v ťahu materiálu valcov a  $\nu$  je Poissonove číslo materiálu valcov. Grafická vizualizácia Simsovej rovnice (36) je uvedená na obr. 10. Sims si bol vedomí nedostatku jeho riešenia Kármánovej diferenciálnej rovnice. Normálové tlakové napätia pri pomernej deformácii pod 10 % neodpovedali teoretickým poznaniam a meraniam z praxe. Preto aj krivky v grafe na obr. 10 vykreslil Sims [7] len pre  $\varepsilon \geq 10$  %.



Obr. 10 Závislosť Simsovej  $\bar{\sigma}$  – funkcie na deformácii  $\varepsilon$ , deformácia na jeden prechod

Fig. 10 Dependence of Sims  $\bar{\sigma}$  – function on deformation  $\varepsilon$ , reduction per one pass

### 1.5 Riešenie podľa Celikova a Pernisa

Základnú filozofiu tohto riešenia diferenciálnej rovnice (6) položil Celikov [5]. Kruhový oblúk dotyku valca

s valcovým materiálom nahradil parabolou. Podobne ako Bland a Ford rovnicu paraboly vyjadril v tvare

$$y = \frac{h_1}{2} + \frac{h_0-h_1}{2l_d^2} \cdot x^2. \quad (38)$$

Pre distribúciu pomerného normálového napätia vo valcovacej medzere stanovil samostatné rovnice. Jedna popisuje distribúciu pomerného napätia pre oblasť zaostávania  $\bar{\sigma}_{nZ}$  a druhá pre oblasť predbiehania  $\bar{\sigma}_{nP}$

$$\bar{\sigma}_{nZ} = \left[ 1 - \left( \frac{u_0}{m} - \frac{1}{m^2} \right) \right] e^{m(u_0-u)} + 2 \left( \frac{u}{m} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (39)$$

$$\bar{\sigma}_{nP} = \left( 1 + \frac{1}{m^2} \right) e^{mu} - 2 \left( \frac{u}{m} + \frac{1}{m^2} \right). \quad (40)$$

Konštanty  $m = m_{Cel-Per}$  a  $u_0$  určujú vzťahy

$$m_{Cel-Per} = \frac{2f \cdot l_d}{\sqrt{h_1 \cdot (h_0-h_1)}}, \quad (41)$$

$$u_0 = \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{R}{h_1}} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (42)$$

Týmto popisom riešenia diferenciálnej rovnice (6) Celikov skončil. Nestanovil funkciu pre výpočet neutrálneho uhla a ani rovnicu pre výpočet  $\bar{\sigma}$  – funkcie. V ďalšom riešení pokračoval Pernis [10]. Odvodil rovnicu pre výpočet neutrálneho uhla a stanovil rovnicu pre výpočet hodnôt  $\bar{\sigma}$  – funkcie. Poloha neutrálneho bodu je definovaná uhlovou súradnicou  $u_n$  (hodnota v radiánoch). Samotná hodnota  $u_n$  je vyjadrená explicitnou rovnicou

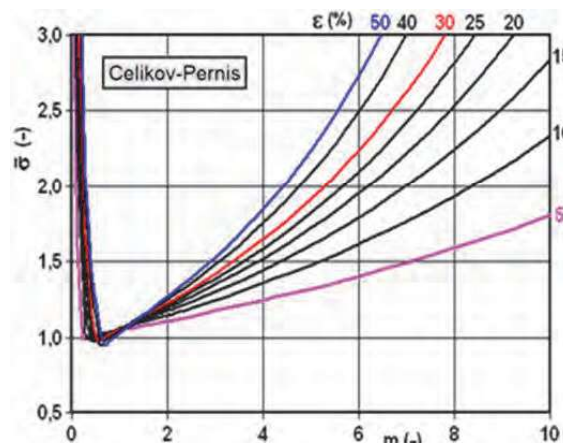
$$(0,5m^2 - mu_0 + 1)e^{m(u_0-u_n)} - (0,5m^2 + 1)e^{mu_n} + 2mu_n = 0. \quad (43)$$

Z hodnoty  $u_n$  je neutrálny uhol  $\alpha_n$  vypočítaný z rovnice

$$\alpha_n = \arcsin \left( \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \cdot \operatorname{tg} u_n \cdot \sin \alpha \right). \quad (44)$$

Z distribučných rovníc (39) a (40) Pernis [10] stanovil rovnicu pre výpočet hodnôt  $\bar{\sigma}$  – funkcie  $\bar{\sigma}_{Cel-Per} = \bar{\sigma}_{n, str}$

$$\bar{\sigma}_{Cel-Per} = \frac{2}{m_{Cel-Per} \cdot u_0} \left[ \left( 1 + \frac{2}{m_{Cel-Per}^2} \right) (e^{m_{Cel-Per} \cdot u_n} - 1) + \frac{u_0^2}{2} - u_n \left( u_n + \frac{2}{m_{Cel-Per}} \right) \right]. \quad (45)$$



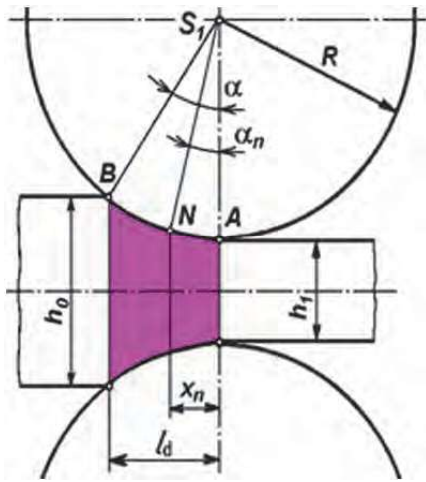
Obr. 11 Závislosť Celikov-Pernisej  $\bar{\sigma}$  – funkcie na konštante  $m$

Fig. 11 Dependence of Tselikov and Pernis  $\bar{\sigma}$  – function on the constant  $m$

Grafická vizualizácia Celikov-Pernisovej rovnice (45) je uvedená na obr. 11. Pernis [9] uvádza, že  $\bar{\sigma}$  – funkcia (45) vierohodne popisuje priebeh valcovacieho tlaku v závislosti na pomere  $l_d/h_s$ , pričom v okolí bodu  $l_d/h_s \approx 1$  má lokálne minimum. Rovnako minimum valcovacieho tlaku v závislosti na konštante  $m$  potvrdzuje grafická vizualizácia rovnice (45). Praktické merania valcovacieho tlaku potvrdzujú, že takéto minimum existuje [15].

### 1.6 Riešenie podľa Pernisa a Kvačkaja

Toto riešenie predstavuje analyticko-numerické riešenie diferenciálnej rovnice (10), kde pre popis kruhového oblúka je použitá rovnica kružnice (8), ako vidieť v obr. 12.



Obr. 12 Kruhový kontaktný oblúk BA podľa Pernisa a Kvačkaja  
Fig. 12 The circle contact arc BA according to Pernis and Kvačkaj

Podľa matematického triedenia diferenciálnych rovníc predstavuje diferenciálna rovnica (10) lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu s pravou stranou. Pernis a Kvačkaj toto riešenie podrobne uviedli v [11]. Diferenciálna rovnica (10) sa zjednoduší, keď pravouhlé súradnice nahradíme polárnymi súradnicami. Distribúciu pomerného normálového napätia vo valcovacej medzere udávajú dve samostatné rovnice. Jedna popisuje distribúciu pomerného tlakového napätia pre oblasť zaostávania  $\bar{\sigma}_{nZ}$  a druhá pre oblasť predbiehania  $\bar{\sigma}_{nP}$

$$\bar{\sigma}_{nZ} = e^{-f \cdot F_1(\varphi)} \cdot \left( e^{f \cdot F_1(\alpha)} + \int_{\varphi}^{\alpha} e^{f \cdot F_1(\varphi)} \cdot F_2(\varphi) \cdot d\varphi \right) \quad (46)$$

$$\bar{\sigma}_{nP} = e^{f \cdot F_1(\varphi)} \cdot \left( 1 + \int_0^{\varphi} e^{-f \cdot F_1(\varphi)} \cdot F_2(\varphi) \cdot d\varphi \right), \quad (47)$$

kde funkcie  $F_1(\varphi)$  a  $F_2(\varphi)$  vznikli pri analytickom riešení diferenciálnej rovnice (10). Tieto funkcie sú nasledovne definované vzťahmi

$$F_1(\varphi) = \frac{2m}{\sqrt{m^2-1}} \cdot \arctg \left( \sqrt{\frac{m+1}{m-1}} \cdot \tg \frac{\varphi}{2} \right) - \varphi, \quad (48)$$

$$F_2(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{m - \cos \varphi}, \quad (49)$$

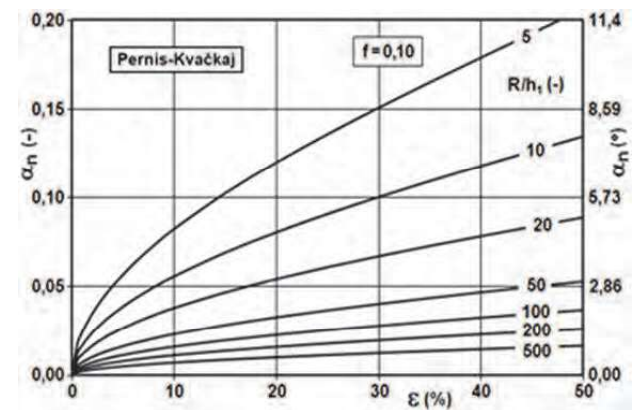
kde konštanta  $m$  je určená

$$m = m_{Per-Kva} = 1 + \frac{h_1}{2R}. \quad (50)$$

Je pozoruhodné, že v tomto riešení konštanta  $m_{Per-Kva}$  neobsahuje koeficient trenia  $f$ , ako predošlé riešenia, okrem riešenia Simsa, kde nevystupuje koeficient trenia. Určenie polohy neutrálneho bodu N, daného neutrálnou súradnicou  $\alpha_n$ , vychádza z rovnosti pomerného normálového napätia v pásme zaostávania  $\bar{\sigma}_{nZ}$  definovaného rovnicou (46) a v pásme predbiehania  $\bar{\sigma}_{nP}$  definovaného rovnicou (47), čo možno matematický zapísať

$$\bar{\sigma}_{nZ}(\alpha_n) = \bar{\sigma}_{nP}(\alpha_n). \quad (51)$$

Rovnica (51) nemá analytické riešenie. Preto bolo nutné využiť numerické riešenie hľadania koreňa  $\alpha_n$  tejto rovnice. Neutrálny uhol je funkciou troch premenných: deformácia, koeficient trenia a pomer  $R/h_1$  (charakteristika geometrie valcovacej medzery).



Obr. 13 Závislosť neutrálneho uhla od relatívnej deformácie a pomeru  $R/h_1$ , deformácia na jeden prechod

Fig. 13 The dependence of angle of neutral point on relative deformation and ratio  $R/h_1$ , reduction per one pass

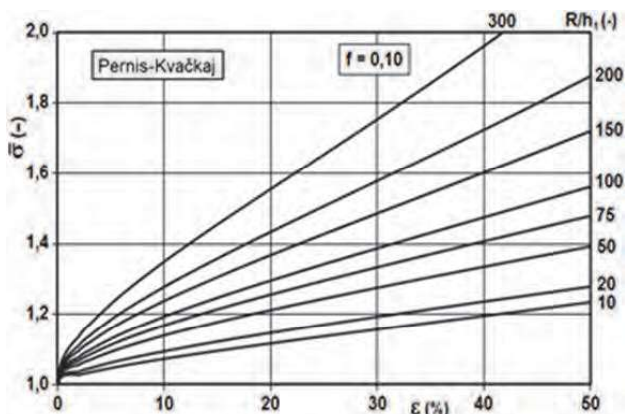
Na obr. 13 je uvedená vizualizácia rovnice (51) pre koeficient trenia  $f = 0,10$ . Na ľavej vertikálnej stupnici je uvedený neutrálny uhol v radiánoch a na pravej vertikálnej stupnici je uvedený neutrálny uhol v stupňoch. Stanovenie jednoduchého vzorca na výpočet neutrálneho uhla, uvádzajú Pernis a Kasala [16]. Proces valcovania charakterizujú pojmom ideálne valcovanie. Za ideálne podmienky valcovania je považovaný stav, keď medzi valcami a valcovaným materiálom neexistuje trenie. V matematickej podobe sú to podmienky pri ktorých je koeficient trenia  $f = 0$ . Túto podmienku autori využili pre riešenie diferenciálnej rovnice (6) a získali nasledovný vzťah

$$\alpha_n = \arccos \left( 1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{h_1}{2R} \right). \quad (52)$$

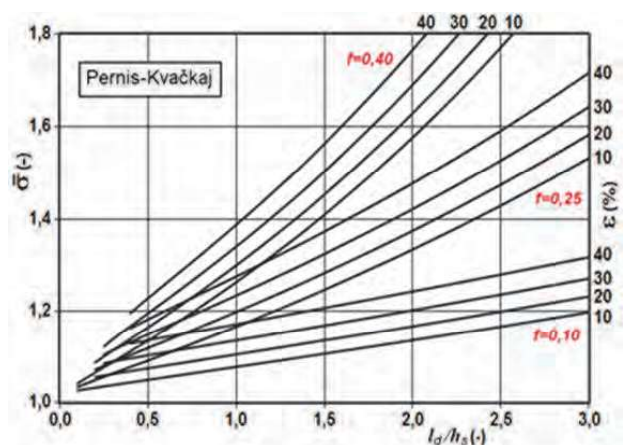
Na základe rovnice (13) je z rovníc (46) a (47) určená rovnica  $\bar{\sigma}$  – funkcie  $\bar{\sigma}_{Per-Kva} = \bar{\sigma}_{n, str}$

$$\bar{\sigma}_{Per-Kva} = \frac{1}{\alpha} \left[ \int_0^{\alpha_n} \left( e^{f \cdot F_1(\varphi)} \left( 1 + \int_0^{\varphi} e^{-f \cdot F_1(\varphi)} F_2(\varphi) d\varphi \right) \right) d\varphi + \int_{\alpha_n}^{\alpha} \left( e^{-f \cdot F_1(\varphi)} \left( e^{f \cdot F_1(\alpha)} + \int_{\varphi}^{\alpha} e^{f \cdot F_1(\varphi)} F_2(\varphi) \cdot d\varphi \right) \right) d\varphi \right]. \quad (53)$$

Nakoľko analytické riešenie rovnice (53) sa nepodarilo nájsť, je potrebné využiť numerickú integráciu. Tu je vhodné použiť Weddleov vzorec, lebo šetrí výpočtový čas. Ako vhodný výpočtový a grafický systém sa ukázal tabuľkový procesor EXCEL s využitím jeho integrovaného programovacieho jazyka VisualBasic. Závislosť Pernis-Kvačkajovej  $\bar{\sigma}$  – funkcie na deformácii  $\varepsilon$ , pričom parametrom je pomer  $R/h_1$ , je zobrazené na obr. 14. Celý graf platí len pre jednu hodnotu koeficienta trenia  $f=0,10$ . Komplexnejšia grafická vizualizácia rovnice (53) je uvedená na obr.15, kde je možné pozorovať, aký vplyv má na valcovací tlak pomer  $l_d/h_s$ , pomerná deformácia  $\varepsilon$  a koeficient trenia  $f$ .



Obr. 14 Závislosť Pernis-Kvačkajovej  $\bar{\sigma}$  – funkcie na deformácii  $\varepsilon$  a pomere  $R/h_1$ , deformácia na jeden prechod  
Fig. 14 Dependence of the Pernis-Kvačkaj  $\bar{\sigma}$  – function on the deformation  $\varepsilon$  and the  $R/h_1$  ratio, reduction per one pass



Obr. 15 Závislosť  $\bar{\sigma}$  – funkcie na pomere  $l_d/h_s$   
Fig. 15 Dependence of  $\bar{\sigma}$  – function on  $l_d/h_s$  ratio

## 2. Diskusia výsledkov

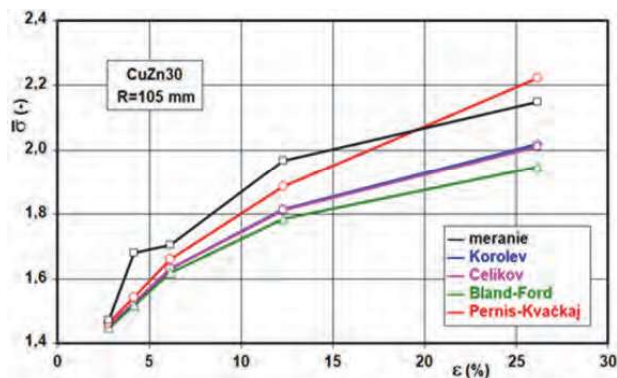
Samotný Kármán stanovil predpoklady, za ktorých jeho diferenciálna rovnica platí pre popis stavu napätosti vo valcovacej medzere. Tvar kompletnej diferenciálnej rovnice predstavuje diferenciálna rovnica (10).

Táto diferenciálna rovnica nemá analytické riešenie. Preto riešitelia hľadali možnosti riešenia za určitých predpokladov a matematických zjednodušení. Jedným takýmto zjednodušením je otázka aproximácie kruhového oblúka, dotyku valca s valcovaným materiálom. To je, ako nahradíť rovnicu kružnice inou, jednoduchšou krivkou. Boli to postupne krivky: lomená čiara Korolev [3], priamka Celikov [5], parabola Tselikov [8], Bland a Ford [6], Pernis [9, 10] a kružnica (bez aproximácie) Pernis a Kvačkaj [11]. Doteraz spomenutí autori predpokladali premenlivé trecie napätie  $\tau = f \cdot \sigma_n$ . Sims [7] uskutočnil predpoklad, že trecie napätie je menšie ako jedna polovica základného aktuálneho deformačného odporu. Tento predpoklad zaviedol do diferenciálnej rovnice, čo spôsobilo vylúčenie koeficientu trenia z výpočtu normálového napätia. Gubkin [17] predložil riešenie, ktoré predpokladá konštantné trecie napätie  $\tau = f \cdot \sigma_a$ . V riešeních diferenciálnej rovnice vystupuje konštanta  $m$ , ktorá je úmerná koeficientu trenia a geometrii valcovacej medzery  $m \approx f \cdot l_d/h_s$ .

Výnimku tvorí riešenie, ktoré predložil Pernis a Kvačkaj [11], kde konštanta  $m$  neobsahuje koeficient trenia. Toto riešenie diferenciálnej rovnice (10) je zabezpečené v dvoch krokoch. V prvom kroku je uskutočnené analytické riešenie a v druhom kroku je riešenie ukončené numerickou integráciou. Preto táto metóda riešenia bola nazvaná ako *analyticko-numerické riešenie* Kármánovej diferenciálnej rovnice. Ako vhodným riešením sa ukázal prechod z pravouhlých súradníc  $[\sigma-x]$  do polárnych súradníc  $[\sigma-\varphi]$ . Prvá funkcia  $F_1$  je exponenciálneho typu  $F_1 = e^{F(\varphi)}$ , ktorá popisuje vplyv šmykového napätia medzi valcami a valcovaným materiálom. Druhá funkcia  $F_2$  je trigonometrického typu  $F_2 = F_2(m, \varphi)$ , ktorá zabezpečuje popis geometrie valcovacej medzery a je nezávislá od koeficientu trenia.

Dobrá prehľad riešení Kármánovej diferenciálnej rovnice prináša Hensel a Spittel [18]. Existujú ďalšie riešenia Kármánovej diferenciálnej rovnice, ktoré sú drobno modifikované oproti predloženým riešeniam: Geleji [19], Počta [20], Pešina [21], Hajduk a Konvičný [22], Kollerová a i. [23], Avitzur [24] a Mielnik [25]. Všetky predložené riešenia Kármánovej diferenciálnej rovnice (okrem riešenia Simsa) by sa dali zopakovať s konštantným trecím napätím  $\tau = f \cdot \sigma_a$ .

Výpočet valcovacej sily si vyžaduje ešte znalosť základného aktuálneho deformačného odporu, ktorý sa zisťuje prostredníctvom torznej skúšky [26] alebo kompresnej skúšky [27] a [28]. Na obr. 16 je uvedené grafické zobrazenie vypočítaných hodnôt  $\bar{\sigma}$  – funkcie a porovnané s nameranými hodnotami pre žíhanú mosadz CuZn30. Najbližšie k nameraným hodnotám sa nachádza krivka vypočítaná z rovnice (53). Ako vhodný prostriedok na numerické riešenie určitého integrálu sa potvrdil programovací jazyk VisualBasic, ktorý je integrálnou súčasťou tabuľkového procesora EXCEL.



Obr. 16 Namerané a vypočítané hodnoty  $\bar{\sigma}$  – funkcie, redukcia na jeden prechod

Fig. 16 Measured and calculated values of the  $\bar{\sigma}$  – function, reduction per one pass

### Záver, ďalšie cesty matematického bádania

Pri písaní tohto článku, ktorý sa zaoberá vývojom riešenia Kármánovej diferenciálnej rovnice, bola snaha študovať toto téma z pôvodnej literatúry, kde to autori jednotlivých riešení po prvýkrát publikovali. Podarilo sa zohnať a preštudovať všetky pramene citované v článku. Mladšie pramene sa nachádzajú v knižnici ŠVK Košice a v knižnici VŠB-TU Ostrava. Staršie pramene sa podarilo získať z knižníc vo Viedni v Rakúsku. V riešení diferenciálnej rovnice (10) je možné pokračovať ďalej, aj pre valcovanie za studena s prihliadnutím na spevnenie valcovaného materiálu. Miesto konštantnej hodnoty základného aktuálneho deformačného odporu by sa v tomto prípade použila funkčná hodnota v závislosti na pomernej deformácii. Je možné do Kármánovej rovnice aplikovať zadný a predný ťah, alebo vypočítať pôsobisko výslednice valcovacej sily a stanoviť potrebný krútiaci moment. Pokračovať v týchto ďalších aplikáciách je už však nad rámec tohto článku, alebo by to skôr mohol byť námet pre ďalší článok.

### Pod'akovanie

Graf porovnávajúci vypočítané hodnoty pomerného normálového napätia so skutočne nameranými hodnotami mohol vzniknúť vďaka tomu, že prof. Ing. Tibor Kvackaj, CSc. z Technickej univerzity v Košiciach, zabezpečil meranie valcovacích síl a prípravu vzoriek pre konštrukciu spevňovacieho diagramu žihanej mosadze CuZn30.

### Literatúra

[1] KÁRMÁN, T. Beitrag zur Theorie des Walzvorganges. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 5 (1925) 2, 139-141.  
[2] SMIRJAGIN, A. P. i dr. *SPRAVOČNÍK po obrabotke cvetnykh metallov i splavov*. Moskva: Metallurgizdat, 1961. 872 s.

[3] KOROLEV, A. A. *Mechaničeskoe oborudovanie prokatnykh cechov černej i cvetnoj metallurgii*. Moskva: Metallurgija, 1976.  
[4] BRZOBOHATÝ, M. *Tváření neželezných kovů*. Bratislava: SVTL, 1963, 414 s.  
[5] CELIKOV, A. I. *Teoria rasčeta usilii v prokatnykh stanach*. Moskva: Metallurgija, 1962.  
[6] BLAND, D. R., FORD, H. The Calculation of Roll Force and Torque in Cold Strip Rolling with Tension. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 159 (1948) 1, 144-163.  
[7] SIMS, R. B. Calculation of Roll Force and Torque in Hot Rolling Mills. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 168 (1954) 6, 191-200.  
[8] TSELIKOV, A. I., NIKITIN, G. S., ROKOTYAN, S. E. *The Theory of Lengthwise Rolling*. Moscow: MIR Publishers, 1981, 344 p.  
[9] PERNIS, R. *Hutnické listy*, 64 (2011) 3, 18-24.  
[10] PERNIS, R. *Acta Metallurgica Slovaca*, 17 (2011) 2, 68-76.  
[11] PERNIS, R., KVACKAJ, T. *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 843720, (2015), 20 p. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/843720>  
[12] REKTORYS, K. a i. *Přehled užité matematiky*. Praha: SNTL, 1968, 1140 s.  
[13] ANGOT, A. *Compléments de Mathématiques à l'usage des Ingénieurs de l'Électrotechnique et des Télécommunications*. Paris: MASSON, 1952. (čes. prekl. ANGOT, A.: *Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry*. Praha: SNTL, 1972, 820 s.).  
[14] OROWAN, E. The Calculation of Roll Pressure in Hot and Cold Flat Rolling. In *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineering*, 150 (1943) 140-167.  
[15] RUSZ, S., SCHINDLER, I., BOŘUTA, J., KUBINA, T. Matematický popis tvářecího faktoru a jeho vliv na válcovací síly za tepla. In *METAL 2005*, Hradec nad Moravicí, 2005, s. 1-6.  
[16] PERNIS, R., KASALA, J. *Hutnické listy*, 68 (2015) 2, 2-6.  
[17] GUBKIN, S. I. *Plastičeskaja deformacija metallov*. Moskva: Metallurgizdat, 1960, 306 s.  
[18] HENSEL, A., SPITTEL, T. *Kraft- und Arbeitsbedarf bildsamer Formgebungsverfahren*. Leipzig: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1978, 528 s.  
[19] GELEJI, A. *Bildsamer Formung der Metalle in Rechnung und Versuch*. Berlin: Akademie-Verlag, 1961, 754 s.  
[20] POČTA, B. *Základy teorie tváření kovů*. Praha: SNTL, 1966, 512 s.  
[21] PEŠINA, E. *Základy užité teorie plasticity*. Praha: SNTL, 1966, 188 s.  
[22] HAJDUK, M., KONVIČNÝ, J. *Silové podmínky při válcování oceli za tepla*. Praha: SNTL, 1983, 264 s.  
[23] KOLLEROVÁ, M., ŽÍDEK, M., POČTA, B., DĚDEK, V. *Valcovanie*. Bratislava: ALFA, 1991, 576 s.  
[24] AVITZUR, B. *Metal Forming: Processes and Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1968, 500 p.  
[25] MIELNIK, E. M. *Metalworking Science and Engineering*, New York: McGraw-Hill, 1991, 976 p.  
[26] PERNIS, R., KASALA, J., BOŘUTA, J. *Kovové Materiály – Metallic Materials*, 48 (2010) 1, 41-46.  
[27] PERNIS, R. *Hutnické listy*, 74 (2021) 1-2, 11-17.  
[28] KRBAŤA, M. a i. *Kovové Materiály – Metallic Materials*, 59 (2021) 379-390.